

Chapitre 29

Applications linéaires (partie A)

Plan du chapitre

1	Généralités	1
1.1	Définition, morphisme d'e.v.	1
1.2	Opérations sur les morphismes	3
1.3	Isomorphismes	5
1.4	Image directe, image réciproque d'un s.e.v.	6
1.5	Noyau d'un morphisme	7
1.6	Image d'un morphisme	8
2	Applications linéaires, bases et dimension	11
2.1	Il en faut peu pour connaître une application linéaire	11
2.2	Application linéaire entre deux espaces de même dimension finie	13
2.3	Espaces isomorphes	15
3	Le théorème du rang	16
3.1	Rang (d'une famille, d'une application)	16
3.2	Rang et composition	18
3.3	Théorème du rang	19
4	Méthodes pour les exercices.	22

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
 E , F et G désignent des espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$.

1 Généralités

1.1 Définition, morphisme d'e.v.

Définition 29.1 – Application linéaire

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite linéaire si

$$\begin{cases} \forall u, v \in E & f(u + v) = f(u) + f(v) \\ \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall u \in E & f(\alpha u) = \alpha f(u) \end{cases}$$

On dit également que f est un morphisme (d'espaces vectoriels) de E dans F .

Notation. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$. Lorsque $F = E$, on note $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$.

Remarque. On peut condenser les deux conditions de la Définition 29.1 et dire que f est linéaire si et seulement si

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall u, v \in E \quad f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

Exemple 1. L'application nulle de E dans F est linéaire.

Exemple 2. Montrer que l'application suivante est linéaire :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto 2x - 3y + 6z \end{aligned}$$

Exemple 3. Les applications suivantes sont linéaires (avec des notations évidentes) :

$\begin{aligned} f : \mathbb{K}[X] &\rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P &\mapsto P' \end{aligned}$	En effet, $f(\alpha P + \beta Q) = \dots\dots\dots$
$\begin{aligned} g : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ M &\mapsto M^\top \end{aligned}$	En effet, $g(\alpha M + \beta N) = \dots\dots\dots$
$\begin{aligned} h : \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{K}) &\rightarrow \mathbb{K} \\ \varphi &\mapsto \int_0^1 \varphi \end{aligned}$	En effet, $h(\alpha \varphi + \beta \psi) = \dots\dots\dots$

Remarque. Moults opérations vues cette année sont en fait des applications linéaires. En plus de la dérivation (d'un polynôme, d'une fonction), l'intégration, et la transposition vues plus haut, on peut citer l'évaluation en un point, le passage à la limite (d'une fonction ou d'une suite), etc.

Théorème 29.2

Pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on a :

1. $f(0_E) = 0_F$
2. $\forall u \in E \quad f(-u) = -f(u)$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \quad \forall x_1, \dots, x_n \in E \quad f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(u_i)$$

Démonstration.

□

Exemple 4. ◦ L'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y - 1, 6x - 3y)$ n'est pas linéaire car :

.....

◦ L'application $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = x^2 + y^2$ n'est pas linéaire car :

.....

Définition 29.3 – endo / iso / auto-morphismes

1. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on dit que f est un endomorphisme (de E).
2. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et f est bijective, on dit que f est un isomorphisme (d'e.v.).
3. Si f est un endomorphisme (de E) et un isomorphisme, on dit que f est automorphisme (de E).

Exemple 5. L'application id_E est clairement linéaire de E dans E . On a donc $\text{id}_E \in \mathcal{L}(E)$.

De plus, id_E est bijective, c'est donc un automorphisme de E .

Exemple 6. Parmi les applications f, g et h de l'Exemple 3, lesquelles sont des endomorphismes ? des isomorphismes ? des automorphismes ?

	Endomorphisme ?	Isomorphisme ?	Automorphisme ?
$f : P \mapsto P'$			
$g : M \mapsto M^\top$			
$h : \varphi \mapsto \int_0^1 \varphi$			

1.2 Opérations sur les morphismes

Théorème 29.4

Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, on a $\lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(E, F)$.

Plus généralement, toute combinaison linéaire d'applications linéaires est encore une application linéaire :

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \quad \forall f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}(E, F) \quad \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n \in \mathcal{L}(E, F)$$

Démonstration. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. On pose $h = \lambda f + \mu g$. Montrons que $h \in \mathcal{L}(E, F)$. Il est clair que h est une application de E dans F . Il suffit donc de montrer que l'application h est linéaire.

□

Rappel : pour tout ensemble Ω , l'ensemble F^Ω est un e.v. En particulier, avec $\Omega = E$, on en déduit que F^E est un e.v.

Corollaire 29.5

$\mathcal{L}(E, F)$ est un s.e.v. de F^E .

Le corollaire découle du Théorème 29.4 par la caractérisation des s.e.v. : on a bien : 0) $\mathcal{L}(E, F) \subset F^E$ puis 1) $0_{F^E} \in \mathcal{L}(E, F)$ et enfin l'assertion 2) stabilité par combinaison linéaire via le Théorème 29.4.

Théorème 29.6 – Stabilité par composition

Toute composée d'applications linéaires est encore une application linéaire.

Dit autrement, si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors l'application $g \circ f$ est linéaire, on a donc $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Démonstration.

Avec les notations ci-dessus, il est clair que $g \circ f$ est une application de E dans G . Montrons que $g \circ f$ est linéaire. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $u, v \in E$.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\alpha u + \beta v) &= g(f(\alpha u + \beta v)) \\ &= g(\alpha f(u) + \beta f(v))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\alpha u + \beta v) &= \alpha g(f(u)) + \beta g(f(v)) \\ &= \alpha (g \circ f)(u) + \beta (g \circ f)(v)\end{aligned}$$

D'où $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

□

Exemple 7. L'application suivante

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \int_0^1 \varphi + \varphi'(0)\end{aligned}$$

- $\varphi \mapsto \int_0^1 \varphi$ qui est clairement linéaire et
- $\varphi \mapsto \varphi'(0)$, qui est linéaire par composée des applications suivantes :

est linéaire par somme de deux applications linéaires, à savoir :

$$f \mapsto f' \quad \text{puis} \quad g \mapsto g(0)$$

Théorème 29.7 – Bilinéarité de la composition d'applications linéaires

Soit $f, f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g, g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F, G)$. Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a :

$$(\alpha g_1 + \beta g_2) \circ f = \alpha(g_1 \circ f) + \beta(g_2 \circ f)$$

$$g \circ (\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha(g \circ f_1) + \beta(g \circ f_2)$$

En particulier, avec $G = F = E$, on en déduit le résultat suivant :

Corollaire 29.8

$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau (non commutatif si $E \neq \{0_E\}$).
Son élément neutre pour $\circ$ est id_E .



L'hypothèse que g est linéaire est indispensable pour la seconde égalité du Théorème 29.7, ce qui fait que F^E n'est pas un anneau pour les lois $+$ et $\circ$ (car les applications de F^E ne sont pas forcément linéaires). En revanche, les deux égalités restent valides si f, f_1, f_2, g_1, g_2 ne sont pas linéaires. Notamment, la première égalité découle de la définition de la loi $+$ pour des applications de F^E .

1.3 Isomorphismes

On rappelle qu'on a montré au chapitre 6 les formules suivantes : si f et g sont des applications bijectives (pas nécessairement linéaires) et si $g \circ f$ a un sens :

- f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = \dots\dots\dots$
- $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = \dots\dots\dots$

Théorème 29.9 – Stabilité par passage à l'inverse

La réciproque d'une application linéaire (lorsqu'elle existe) est également linéaire.

Ainsi, si $f : E \rightarrow F$ est un isomorphisme (d'e.v.), sa réciproque $f^{-1} : F \rightarrow E$ est également un isomorphisme (d'e.v.).

Démonstration.

□

Sur le même principe, si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont des isomorphismes (d'e.v.), alors $g \circ f : E \rightarrow G$ est un isomorphisme (d'e.v.), mais c'est un résultat déjà connu de nous : si g et f sont linéaires (resp. bijectives), alors $g \circ f$ est linéaire (resp. bijective).

1.4 Image directe, image réciproque d'un s.e.v.

Re-re-rappel :

L'ensemble $f^{-1}(B)$ a un sens même si f n'est pas bijective !

Théorème 29.10

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Pour tout s.e.v. A de E , l'ensemble $f(A)$ est un s.e.v. de F .
- Pour tout s.e.v. B de F , l'ensemble $f^{-1}(B)$ est un s.e.v. de E .

Autrement dit, l'image directe ou réciproque d'un s.e.v. par une application linéaire est encore un s.e.v.

Démonstration.

□

1.5 Noyau d'un morphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. L'application f est en particulier un morphisme du groupe $(E, +)$ dans le groupe $(F, +)$. On peut donc définir son noyau comme l'ensemble :

$$\text{Ker } f = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$$

Et en particulier, $u \in \text{Ker } f \iff f(u) = 0_F$

Théorème 29.11

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$

1. $\text{Ker } f$ est un s.e.v. de E .
2. f est injective si et seulement si $\text{Ker } f = \{0_E\}$.

Démonstration.

1. Immédiat car $\text{Ker } f = f^{-1}(\{0_F\})$ et que $\{0_F\}$ est un s.e.v. de F .
2. La preuve est identique à celle vue pour les morphismes de groupe (cf le chapitre "Structures algébriques").

□

Exemple 8. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble suivant est un $\mathbb{R}$ -e.v. :

$$F = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid \alpha f(2) + \beta f'(0) + \gamma \int_0^1 f = 0 \right\}$$

Exemple 9. L'application linéaire de dérivation de polynômes, définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}[X] &\rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P &\mapsto P' \end{aligned}$$

est non injective. En effet, son noyau est $\text{Ker } f = \dots \neq \{0\}$.

Méthode – Déterminer $\text{Ker } f$

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour déterminer l'ensemble $\text{Ker } f$, on résout l'équation $f(u) = 0_F$ d'inconnue $u \in E$: les solutions sont exactement les vecteurs de $\text{Ker } f$.

Si F est de dimension finie, on peut réexprimer l'égalité $f(u) = 0_F$ sous la forme d'un système linéaire dont les inconnues sont les coordonnées de u . Il suffit ensuite de résoudre ce système...

Exemple 10. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM - \lambda M$. Déterminer si l'application f est injective ou non selon les valeurs de λ .

1.6 Image d'un morphisme

Définition 29.12

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. L'ensemble image de f est défini par :

$$\text{Im } f = \{v \in F \mid \exists u \in E \quad f(u) = v\} = f(E)$$

Autrement dit, $v \in \text{Im } f \iff \exists u \in E \quad v = f(u)$

Théorème 29.13

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$

1. $\text{Im } f$ est un s.e.v. de F .
2. f est surjective si et seulement si $\text{Im } f = F$.

Démonstration.

1. Immédiat car $\text{Im } f = f(E)$ et que E est un s.e.v. de E .
2. Comme $\text{Im } f = f(E)$,

$$\text{Im } f = F \iff f(E) = F \iff f \text{ surjective} \quad (\text{cf chapitre 6})$$

□

Exemple 11. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que l'ensemble suivant est un $\mathbb{K}$ -e.v. :

$$A\mathbb{K}[X] = \{AP \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$$

Théorème 29.14

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E . Alors

$$\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_i))_{i \in I}$$

En particulier, $(f(e_i))_{i \in I}$ est une famille génératrice de $\text{Im } f$.

En particulier, si E est de dimension finie n et si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors

$$\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

et la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im } f$.

Démonstration. On ne fait la preuve que dans le cas où E est de dimension finie notée n .

□

Méthode – Déterminer $\text{Im } f$

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour déterminer l'ensemble $\text{Im } f$, on peut, au choix :

- L'écrire sous forme de "Vect" immédiatement à partir d'une base de E , puis le mettre sous forme "équation" par la méthode connue (cf fin du Chapitre 27).
- Se donner un "paramètre" $v \in F$ puis chercher pour quelles valeurs de v est-ce que l'équation $(E_v) : f(u) = v$ d'inconnue $u \in E$ admet au moins une solution.

Ces méthodes sont sûres d'aboutir lorsque E et F sont de dimensions finies : en effet, comme f est linéaire, on peut se ramener à chaque fois à la résolution d'un **système linéaire** dont il est facile de vérifier s'il possède ou non une solution : on échelonne et on trouve des équations de compatibilités sur y (ou plutôt les coordonnées de y).

Exemple 12. Déterminer l'image de l'application linéaire :

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) &\mapsto (x - y + z, y - z + t, x + t) \end{aligned}$$

Exemple 13. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (z - y, x - z, y - x)$. Déterminer $\text{Im } f$.

2 Applications linéaires, bases et dimension

2.1 Il en faut peu pour connaître une application linéaire

Théorème 29.15 – Il suffit de connaître f sur une base

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E et $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in I}$ une famille *quelconque* de vecteurs de F . Alors il existe une *unique* application linéaire f de E dans F telle que

$$\forall i \in I \quad f(e_i) = u_i$$

Ainsi, pour connaître ou définir une application linéaire, il suffit de connaître ou définir son image sur les vecteurs d'une base quelconque de l'ensemble de départ.

Preuve partielle du Théorème 29.15. On ne prouvera que l'unicité dans le cas où E est de dimension finie, notée n . On peut ainsi prendre $I = \llbracket 1, n \rrbracket$. On suppose donc :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad f(e_i) = u_i$$

Preuve de l'unicité.

□

Exemple 14. Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

- Il existe une unique application $f : \mathbb{K}_2[X] \rightarrow \mathbb{K}_2[X]$ linéaire telle que $(f(1), f(X), f(X^2)) = (0, 1, 2X)$. On peut la réexprimer plus simplement par $f : P \mapsto P'$.
- Il existe une (unique) application $g : \mathbb{K}_2[X] \rightarrow \mathbb{K}_2[X]$ telle que $(g(1), g(X), g(X^2)) = (0, 1, 2X + 4)$. Étant donné $P = aX^2 + bX + c$, on a alors

Corollaire 29.16

Si deux applications linéaires coïncident sur une base, alors elles sont égales.

Théorème 29.17 – Il suffit de connaître f sur des s.e.v. supplémentaires

Soit A et B deux s.e.v. tels que $E = A \oplus B$. Soit $g : A \rightarrow F$ et $h : B \rightarrow F$ des applications linéaires données. Alors il existe une *unique* application $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$f|_A = g \quad \text{et} \quad f|_B = h$$

Ainsi, pour connaître ou définir une application linéaire, il suffit de connaître ou définir ses restrictions sur deux s.e.v. supplémentaires.

2.2 Application linéaire entre deux espaces de même dimension finie

Lemme 29.18

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose E de dimension finie et on note $n = \dim E$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. f est **injective** (resp. **surjective**, resp. **bijective**).
2. Il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est **libre** (resp. **génératrice**, resp. une **base** de F).
3. Pour toute base $(e_1, \dots, e_n)$ de E , la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est **libre** (resp. **génératrice**, resp. une **base** de F).

Remarque. Le théorème ci-dessus est vrai aussi si E est de dimension infinie. Il suffit de remplacer la famille $(e_1, \dots, e_n)$ par $(e_i)_{i \in I}$ et la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ par $(f(e_i))_{i \in I}$. Mais on ne s'en servira que si E est de dimension finie.

En particulier, si E et F sont de dimensions finies différentes, aucune application $f \in \mathcal{L}(E, F)$ n'est bijective.

Démonstration. Il y a trois assertions et trois “cas” : le cas “injectif / libre”, le cas “surjectif / génératrice” et le cas “bijectif / base”. Le dernier cas est une conséquence directe des deux premiers cas. Il suffit donc de montrer que 1, 2 et 3 sont équivalentes dans les cas “injectif” et “surjectif”.

Le sens 3 $\implies$ 2 est évident dans tous les cas. On va montrer les sens 1 $\implies$ 3 dans les cas “injectif” et “surjectif”.

- **Sens 1 $\implies$ 3, cas “injectif” :** on suppose f injective. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Montrons que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n) &= 0_F \\ \implies f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) &= 0_F = f(0_E) && \text{par linéarité de } f \\ \implies \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n &= 0_E && \text{car } f \text{ est injective} \\ \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n &= 0 && \text{car } (e_1, \dots, e_n) \text{ est libre} \end{aligned}$$

Donc la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre.

- **Sens 1 $\implies$ 3, cas “surjectif” :** on suppose f surjective. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Montrons que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$

est une famille génératrice de F . Soit $v \in F$. Comme f est surjective, il existe $u \in E$ tel que $f(u) = v$. On décompose u selon la base $(e_1, \dots, e_n)$:

$$u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

Alors

$$v = f(u) = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n)$$

Ainsi, $v \in \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$. Par arbitraire sur v , on a $F \subset \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$. L'autre inclusion est évidente. Ainsi, $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de F .

□

Théorème 29.19

On suppose que E et F sont de **même dimension finie**. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

f est injective ssi f est surjective ssi f est bijective

Démonstration.

□

Théorème 29.20 – Être inversible d'un côté suffit en dimension finie

On suppose que E et F sont de **même dimension finie**. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est bijective
2. Il existe $g \in \mathcal{L}(\dots, \dots)$ telle que $g \circ f = \text{id}_{\dots}$.
3. Il existe $h \in \mathcal{L}(\dots, \dots)$ telle que $f \circ h = \text{id}_{\dots}$.

Et dans ce cas, $g = h = f^{-1}$.

Démonstration. Il est clair que 1 implique 2 et 3 en posant $g = h = f^{-1}$. On va montrer que les assertions 2 et 3 entraînent 1.

- On suppose l'assertion 2. On a vu au chapitre sur les Applications que cela entraîne que f est injective, ce qui permet de déduire que f est bijective par le Théorème 29.19.

- On suppose l'assertion 3. On a vu au chapitre sur les Applications que cela entraîne que f est surjective, ce qui permet de déduire que f est bijective par le Théorème 29.19.

Enfin, maintenant qu'on a montré que les assertions 1 à 3 sont équivalentes, il faut montrer que, lorsqu'elles sont vérifiées, on a bien $g = h = f^{-1}$.

□

2.3 Espaces isomorphes

Définition 29.21

E et F sont dit isomorphes s'il existe un isomorphisme $f : E \rightarrow F$.

Notation. Si E et F sont isomorphes, on note : $E \simeq F$.

Théorème 29.22

On suppose que E est de dimension finie. Alors $E \simeq F$ si et seulement si $\dim E = \dim F$ (ce qui sous-entend que F est de dimension finie).

Démonstration. Sens direct : supposons $E \simeq F$ et notons $f : E \rightarrow F$ un isomorphisme. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors par le Lemme 29.18, comme f est bijective, la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F . Donc F est de dimension finie et $\dim F = n = \dim E$.

□

Corollaire 29.23

Tout $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. $\dim \mathbb{K}^n = n$ et deux e.v. de même dimension finie sont isomorphes par ce qui précède.

□

Théorème 29.24

On suppose E et F de dimension finies. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$$

Démonstration.

On pose $n = \dim E$. On va montrer que $\mathcal{L}(E, F)$ et F^n sont isomorphes, donc de même dimension. Cela permettra de conclure car $\dim F^n = n \dim F = \dim E \times \dim F$. Pour cela on pose :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{L}(E, F) &\rightarrow F^n \\ f &\mapsto (f(e_1), \dots, f(e_n)) \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que φ est un isomorphisme. On peut facilement vérifier que φ est linéaire. Montrons que φ est bijective. Par le Théorème 29.15, on a

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in F^n \quad \exists ! f \in \mathcal{L}(E, F) \quad \begin{cases} f(e_1) = u_1 \\ \vdots \\ f(e_n) = u_n \end{cases}$$

ce qui se réécrit :

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in F^n \quad \exists ! f \in \mathcal{L}(E, F) \quad \varphi(f) = (u_1, \dots, u_n)$$

Or, cela signifie exactement que φ est bijective. Donc φ est un isomorphisme.

□

3 Le théorème du rang

3.1 Rang (d'une famille, d'une application)

Définition 29.25 – Rang d'une famille de vecteurs

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E . On définit le rang de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ par :

$$\text{rg}(u_1, \dots, u_n) := \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_n))$$

Plus généralement, étant donné $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E , si l'ensemble $\text{Vect}(u_i)_{i \in I}$ est de dimension finie, on définit le rang de la famille $(u_i)_{i \in I}$ par :

$$\text{rg}(u_i)_{i \in I} := \dim(\text{Vect}(u_i)_{i \in I})$$

Exemple 15. Soit $\mathcal{F} = ((1, -1, 0), (3, 5, 4), (6, -4, 1), (0, -6, -3))$. On peut montrer que

$$\text{Vect}(\mathcal{F}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 2z\}$$

Ainsi $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}(\mathcal{F})) = 2$.

Théorème 29.26

Soit $u_1, \dots, u_n \in E$. On a :

$$\text{rg}(u_1, \dots, u_n) \leq n$$

De plus, $\text{rg}(u_1, \dots, u_n) = n$ si et seulement si $(u_1, \dots, u_n)$ est libre.

Démonstration. La famille $(u_1, \dots, u_n)$ engendre $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$, donc la dimension de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est majorée par n . Montrons enfin l'équivalence.

- Si $\text{rg}(u_1, \dots, u_n) = n$, alors $\dim \text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = n$, donc $(u_1, \dots, u_n)$ engendre l'espace $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ de dimension n . Ainsi (par le TTC), $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de cet espace. En particulier, $(u_1, \dots, u_n)$ est libre.
- Si $(u_1, \dots, u_n)$ est libre, alors c'est une famille libre et génératrice de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$, qui est donc de dimension n . Ainsi, $\text{rg}(u_1, \dots, u_n) = n$.

□

Définition 29.27 – Rang d'une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que f est de rang fini si $\text{Im } f$ est de dimension finie. On définit alors rang de f par :

$$\text{rg } f := \dim(\text{Im } f) \in \mathbb{N}$$

Remarque. Étant donné une base quelconque $(e_i)_{i \in I}$ de E , on a donc

$$\text{rg } f = \dim \text{Vect}(f(e_i)_{i \in I}) = \text{rg}(f(e_i))_{i \in I}$$

En particulier, si E est de dimension finie n et qu'on note $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E :

$$\text{rg } f = \dim \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

Exemple 16. Déterminer le rang de l'application linéaire :

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) &\mapsto (x - y + z, y - z + t, x + t) \end{aligned}$$

Théorème 29.28

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose E de dimension finie. Alors f est de rang fini et

$$\text{rg } f \leq \dim E$$

De plus, $\text{rg } f = \dim E$ si et seulement si f est injective.

Démonstration.

□

Théorème 29.29

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose F de dimension finie. Alors f est de rang fini et

$$\operatorname{rg} f \leq \dim F$$

De plus, $\operatorname{rg} f = \dim F$ si et seulement si f est surjective.

Démonstration.

□

Exemple 17. La fonction $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de l'Exemple 16 vérifie $\operatorname{rg} f = 2$. Cela signifie que f n'est ni injective, ni surjective.

Remarque. En comparant le rang de f à la dimension de E , on en déduit à quel point l'application f “contracte” les dimensions :

3.2 Rang et composition

Théorème 29.30 – Composer par un isomorphisme ne modifie pas le rang

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang fini.

1. Pour tout isomorphisme $\varphi : F \rightarrow G$, l'application $\varphi \circ f$ est de rang fini et $\operatorname{rg}(\varphi \circ f) = \operatorname{rg} f$
2. Pour tout isomorphisme $\varphi : G \rightarrow E$, l'application $f \circ \varphi$ est de rang fini et $\operatorname{rg}(f \circ \varphi) = \operatorname{rg} f$

Théorème 29.31

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ deux morphismes de rangs finis. Alors $g \circ f$ est de rang fini et

$$\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg } f, \text{rg } g)$$

Exemple 18. Existe-t-il des applications linéaires $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ et $g : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que :

- l'application linéaire $f \circ g : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ soit bijective ?

- l'application linéaire $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ soit bijective ?

3.3 Théorème du rang**Lemme 29.32**

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit S un supplémentaire de $\text{Ker } f$ dans E . Alors $f|_S$ est un isomorphisme de S sur $\text{Im } f$.

Démonstration.

Soit donc S tel que $\text{Ker } f \oplus S = E$. On considère l'application

$$\begin{aligned} \tilde{f} : S &\rightarrow \text{Im } f \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

D'où $\text{Ker } \tilde{f} = \{0_E\}$: $\tilde{f}$ est injective.

- Montrons que $\tilde{f}$ est surjective. Soit $y \in \text{Im } f$. Alors il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On décompose alors x en

Montrons que $\tilde{f}$ est un isomorphisme. Il est clair que $\tilde{f}$ est linéaire.

$$x = x_K + x_S \quad \text{avec} \quad (x_K, x_S) \in (\text{Ker } f) \times S$$

- Montrons que $\tilde{f}$ est injective. Soit $x \in E$. Comme $\tilde{f}$ est définie sur S :

$$x \in \text{Ker } \tilde{f} \iff x \in S \text{ et } f(x) = 0 \iff x \in S \cap \text{Ker } f \iff x = \{0_E\}$$

Alors, $y = f(x) = f(x_K) + f(x_S) = f(x_S)$. Ainsi, $\tilde{f}(x_S) = y$. Par arbitraire sur y , $\tilde{f}$ est surjective.

□

Théorème 29.33 – Théorème du rang

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, avec E de dimension finie. (L'application f est de rang fini et)

Ce théorème ne suppose pas que F soit de dimension finie !

Démonstration.

□

4 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour montrer qu'un ensemble X est un s.e.v., on peut désormais aussi :

- Montrer que X est un noyau ou l'image d'une application linéaire f .
- (Rare) Montrer que $X = f(A)$ ou $X = f^{-1}(B)$ avec f une application linéaire et A, B des s.e.v.

Méthode

Pour montrer qu'une application $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective, on peut :

- Montrer que $\text{Ker } f = \{0_E\}$.
- Si E est de dimension finie, montrer que $\text{rg } f = \dim E$.
- (Rare) Montrer que f transforme une base de E en famille libre.

Méthode

Pour montrer qu'une application $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est surjective, on peut :

- Montrer que $\text{Im } f = F$.
- Si F est de dimension finie, montrer que $\text{rg } f = \dim F$.
- (Rare) Montrer que f transforme une base de E en famille génératrice.

Méthode

Pour montrer qu'une application $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective, avec E et F de dimensions finies, on peut :

- Montrer que f est injective et que $\dim E = \dim F$.
- Montrer que f est surjective et que $\dim E = \dim F$.

Méthode

Quand on raisonne sur une application linéaire $f : E \rightarrow F$ avec E de dimension finie, il est essentiel d'avoir en tête le théorème du rang :

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim E$$